NAT EX

Hinweise zu Wachstumsprozessen – NATEX Aufgabe 2-2021/22

Die folgenden Hinweise sollen dir helfen, die unterschiedlichen Wachstumsformen, die dir in der Natur und bei der aktuellen NATEX-Aufgabe begegnen, besser einordnen zu können. Auch wenn häufig nur von Wachstumsprozessen gesprochen wird, werden hierbei auch *Abnahme*prozesse mit eingeschlossen. Eine Abnahme ist dann lediglich ein Spezialfall mit *negativem* Wachstum.

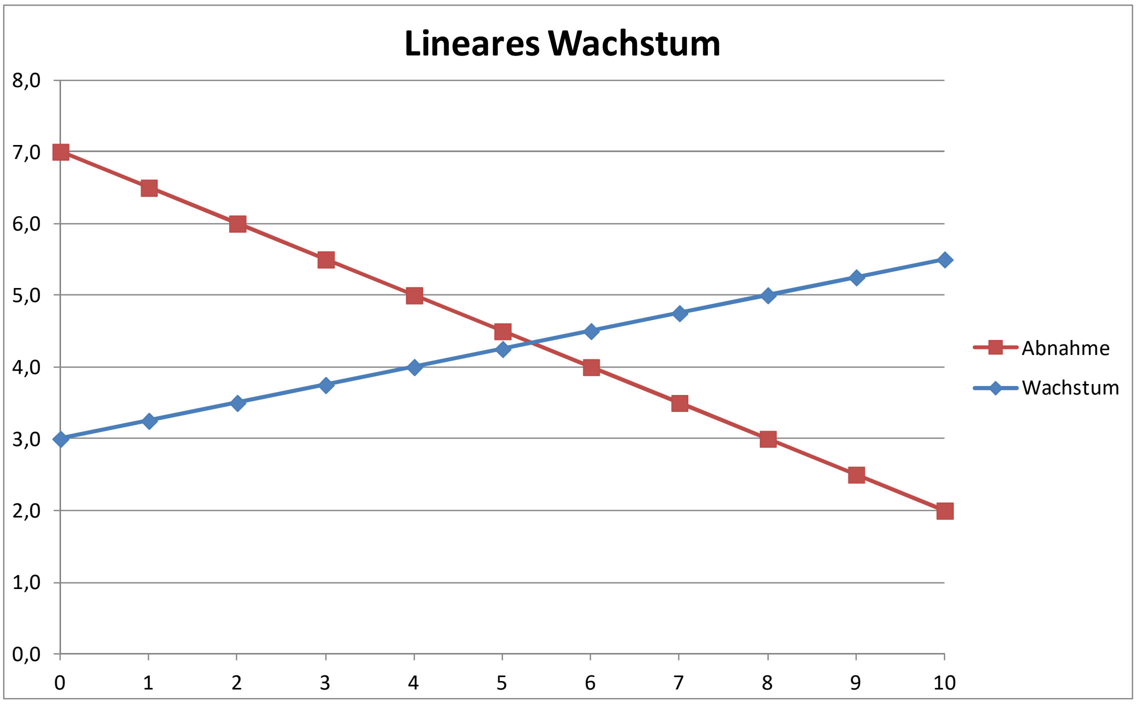
Im ersten Teil werden unterschiedliche Wachstumsformen vorgestellt. Im zweiten Teil bekommst du Tipps, wie du die verschiedenen Wachstumsformen erkennen kannst.

1. Unterschiedliche Wachstumsformen

a) Lineares Wachstum (bzw. lineare Abnahme)

Grundinformationen:

Beim linearen Wachstum nimmt der Wert in gleichen Zeitabständen immer um den gleichen Betrag zu (oder ab). Im Diagramm ergibt sich eine Gerade:



Ein Beispiel für eine lineare Abnahme ist z.B. die Länge einer brennenden Kerze (im Diagramm z.B. mit Anfangslänge 7cm und stündlicher Abnahme um 0,5cm).

Weiterführende Informationen:

Das lineare Wachstum kann durch eine Gleichung der Form

$$\boldsymbol{h(t) = m \cdot t + h_0}$$

beschrieben werden (m: Steigung bzw. Zunahme/Abnahme pro Zeiteinheit; h_0: Anfangswert).

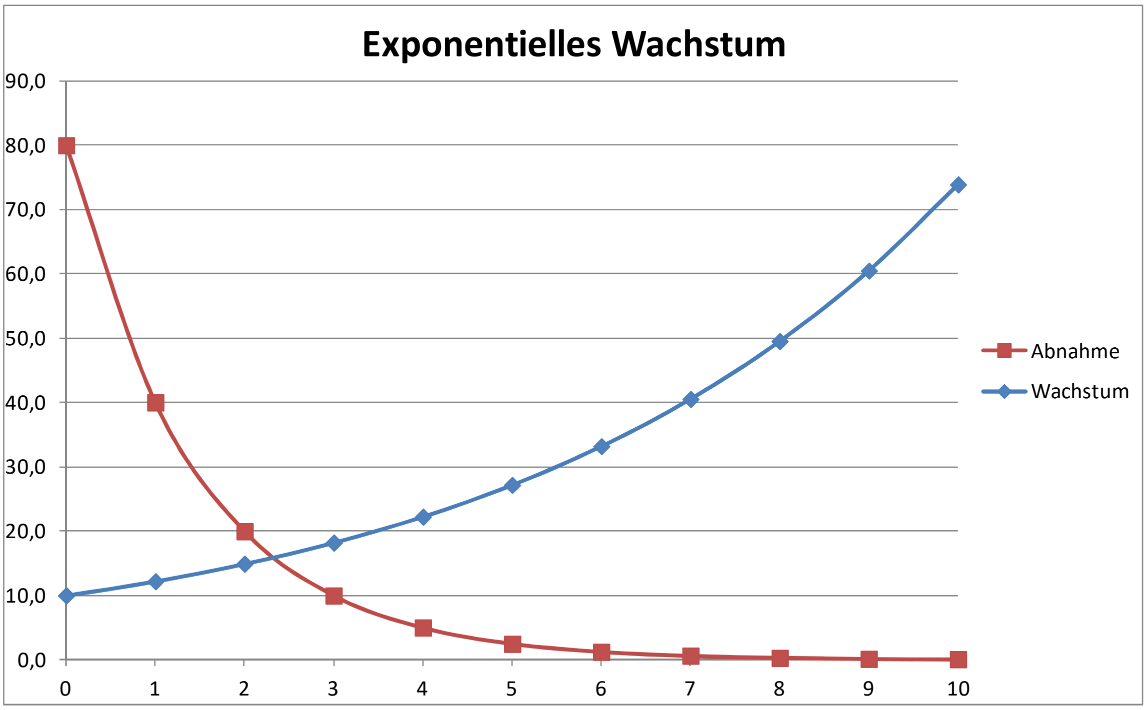
Für die Kerze im Beispiel ergäbe sich: $h(t) = -0{,}5 \cdot t + 7$

b) <u>Exponentielles Wachstum</u> (bzw. exponentielle Abnahme)

Grundinformationen:

Beim exponentiellen Wachstum nimmt der Wert in gleichen Zeitabständen immer um den gleichen Faktor zu (oder ab).

Im Diagramm ergibt sich eine Kurve, die immer steiler (flacher) verläuft:



Ein Beispiel für eine exponentielle Abnahme ist z.B. die Abkühlung einer Tasse Tee (im Diagramm z.B. mit Anfangstemperatur 80°C und Halbierung der Temperatur jede Stunde, Umgebungstemperatur 0°C).

Weiterführende Informationen:

Das exponentielle Wachstum kann durch eine Gleichung der Form

$$\boldsymbol{A(t) = A_0 \cdot b^t}$$

beschrieben werden (A_0: Anfangswert; b: Wachstumsfaktor).

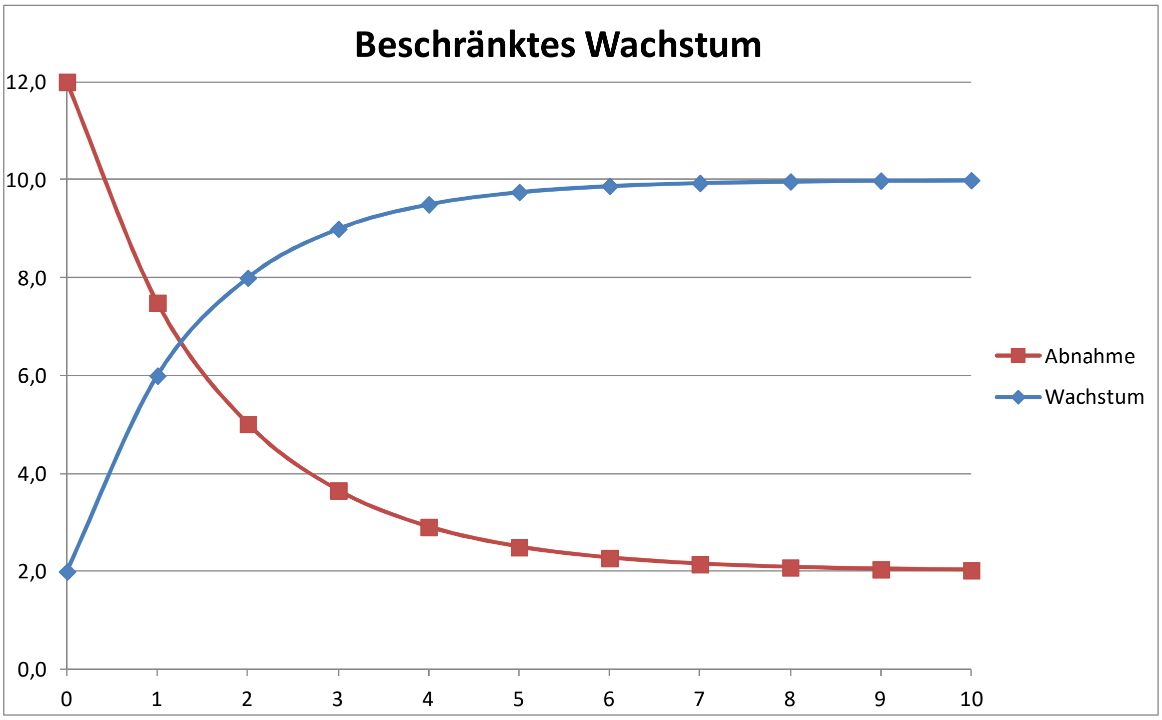
Für die Teetasse im Beispiel ergäbe sich: $A(t) = 80 \cdot 0{,}5^t$

Eine bedeutende Größe beim exponentiellen Wachstum ist die *<u>Verdopplungszeit</u>*, bei der exponentiellen Abnahme die *<u>Halbwertszeit</u>*. Sie gibt an, in welcher Zeitspanne sich die Werte verdoppeln (bzw. halbieren). Im obigen Beispiel mit dem Tee beträgt die Halbwertszeit 1 Stunde.

c) <u>Beschränktes Wachstum</u> (bzw. beschränkte Abnahme)

Grundinformationen:

Beim beschränkten Wachstum handelt es sich um ein exponentielles Wachstum, das durch eine obere (oder untere) Grenze beschränkt ist.
Im Diagramm ergibt sich eine Kurve, die sich der Grenze immer weiter annähert:



Ein Beispiel für ein beschränktes Wachstum ist z.B. das Wachstum einer Pflanze (im Diagramm z.B. mit der Anfangsgröße 2cm und der oberen Grenze 10cm).

Weiterführende Informationen:

Das beschränkte Wachstum kann durch eine Gleichung der Form

$$\boldsymbol{A(t) = (A_0 - G) \cdot b^t + G}$$

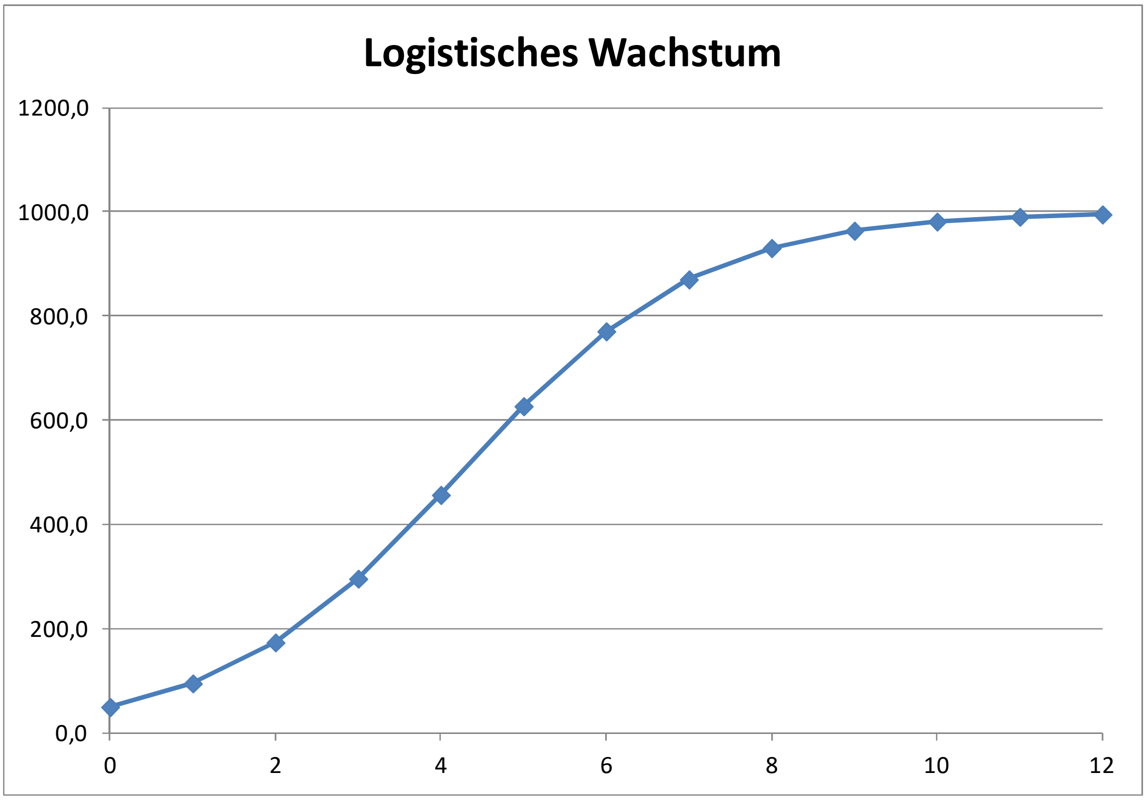
beschrieben werden (A_0: Anfangswert; G: Grenze; b: Wachstumskonstante).

Für die Pflanze im Beispiel ergäbe sich: $A(t) = (2 - 10) \cdot 0{,}5^t + 10$
Hierbei wird angenommen, dass die Pflanze in jeder Zeiteinheit um die Hälfte der Differenz bis zur Grenze wächst.

d) Logistisches Wachstum

Grundinformationen:

Das logistische Wachstum ist eine Kombination aus exponentiellem und beschränktem Wachstum. Zunächst wächst die Größe ähnlich wie beim exponentiellen Wachstum, dann geht sie in ein Wachstum ähnlich dem beschränkten Wachstum über. Im Diagramm ergibt sich eine s-förmige Kurve:



Ein Beispiel für ein logistisches Wachstum ist z.B. die Ausbreitung eines Virus in einer isolierten Personengruppe. Zunächst wächst die Zahl der Infizierten exponentiell, nach einer Weile gibt es immer weniger Personen, die nicht infiziert sind, so dass sich das Wachstum verlangsamt und sich schließlich der Gesamtzahl der Personen annähert (im Diagramm z.B. mit Anfangszahl 50 und der Gesamtzahl der Personen 1000.)

Weiterführende Informationen:

Das logistische Wachstum kann durch eine Gleichung der Form

$$\boldsymbol{A(t) = \frac{A_0 \cdot G}{A_0 + (G - A_0) \cdot b^t}}$$

beschrieben werden (A_0: Anfangswert; G: Grenze; b: Wachstumskonstante).

Für die Ausbreitung des Virus im Beispiel ergäbe sich:

$$A(t) = \frac{50 \cdot 1000}{50 + (1000 - 50) \cdot 0{,}5^t} = \frac{50.000}{50 + 950 \cdot 0{,}5^t}$$

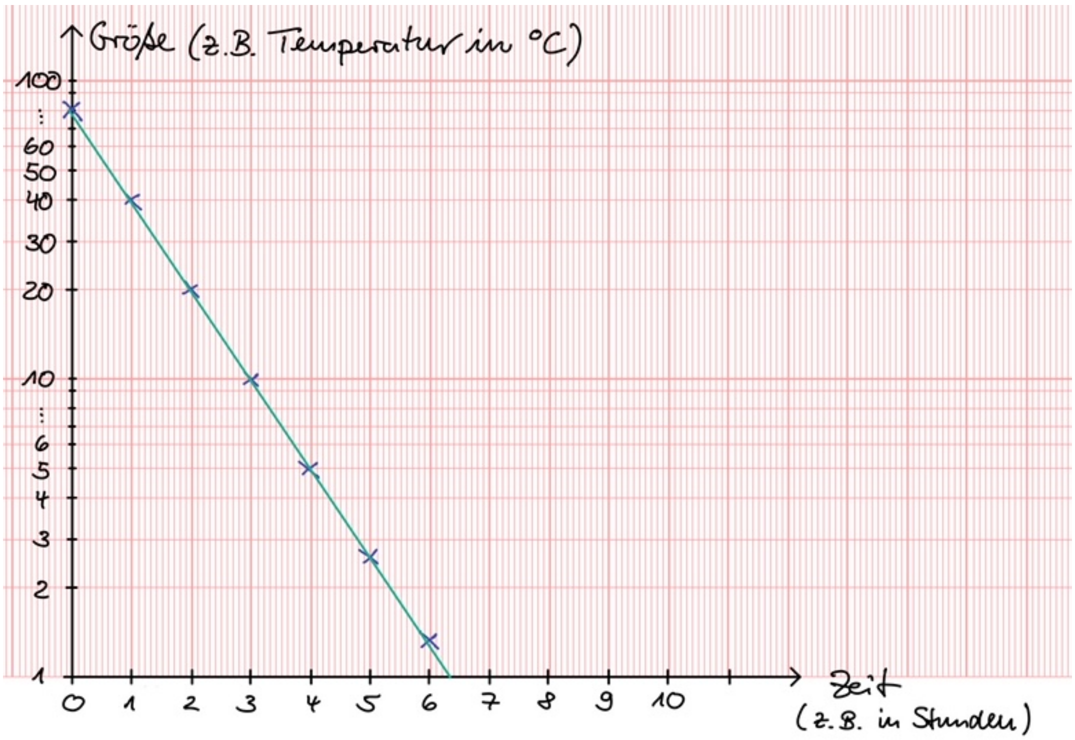
2. Erkennen der unterschiedlichen Wachstumsformen

a) Lineares Wachstum (bzw. lineare Abnahme)

- *Grafisch*: Trage die Messpunkte in ein Diagramm ein. Liegen die Punkte auf einer Geraden bzw. lässt sich eine Ausgleichsgerade zeichnen, liegt ein lineares Wachstum vor.
- *Rechnerisch*: Bestimme die Zu- bzw. die Abnahme in festen Zeitintervallen (Differenz jeweils aufeinander folgender Werte bilden). Ergeben sich hier (annähernd) gleiche Werte, kann von einem linearen Wachstum ausgegangen werden.

b) Exponentielles Wachstum (bzw. exponentielle Abnahme)

- *Rechnerisch*: Bestimme den Quotienten jeweils aufeinander folgender Werte (das Zeitintervall zwischen den Werten muss dabei immer gleich sein!). Bilde also A_1/A_2, A_2/A_3 usw. Ergeben sich hier (annähernd) gleiche Quotienten, kann von einem exponentiellen Wachstum ausgegangen werden.
- *Grafisch*: Trägst du die Messpunkte normal auf, ergibt sich eine gekrümmte Kurve, wie im ersten Abschnitt dargestellt. Leider gibt es viele ähnlich aussehende Kurven, die nicht exponentiell sind. Um sicher zu stellen, dass es tatsächlich ein exponentielles Wachstum ist, verwendet man einen kleinen Trick. Man trägt die Messpunkte in ein sogenanntes halb-logarithmisches Diagramm ein (s. Abb.).



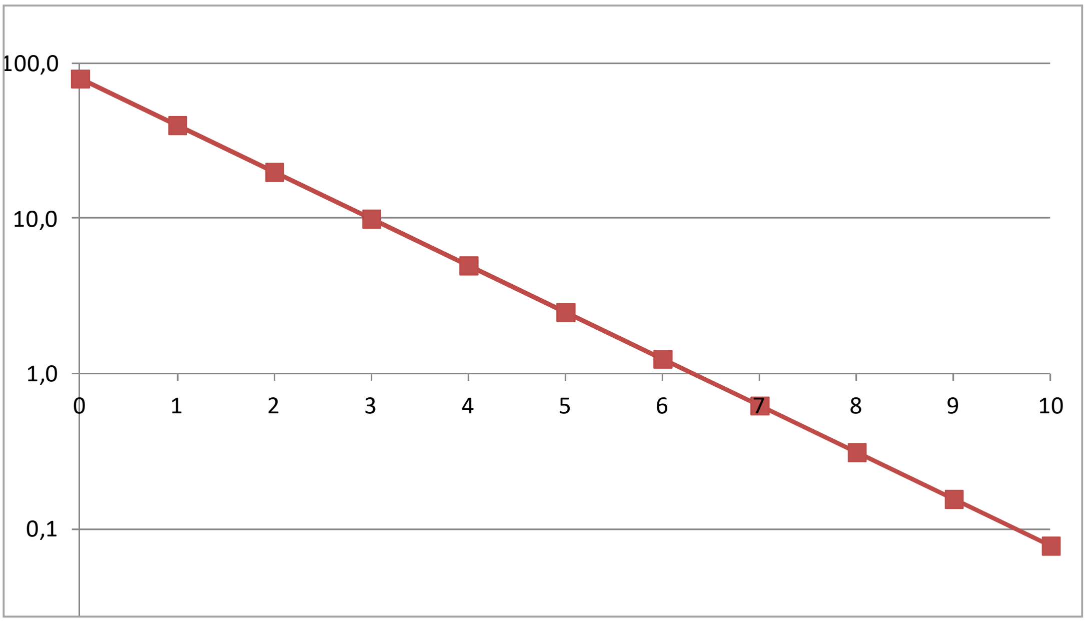
Die x-Achse ist hier ganz normal, die y-Achse hat immer kleiner werdende Abstände und in jedem neuen Abschnitt werden die Zahlen um den Faktor 10 größer (außerdem gibt es hier keine Null!).

Liegen die eingetragenen Punkte (annähernd) auf einer Geraden, so liegt ein exponentielles Wachstum vor. Als Beispiel sind in der Abbildung die Werte für die Abkühlung einer Tasse Tee aus dem ersten Abschnitt eingetragen. Da die Gerade fällt, liegt eine exponentielle *Abnahme* vor.

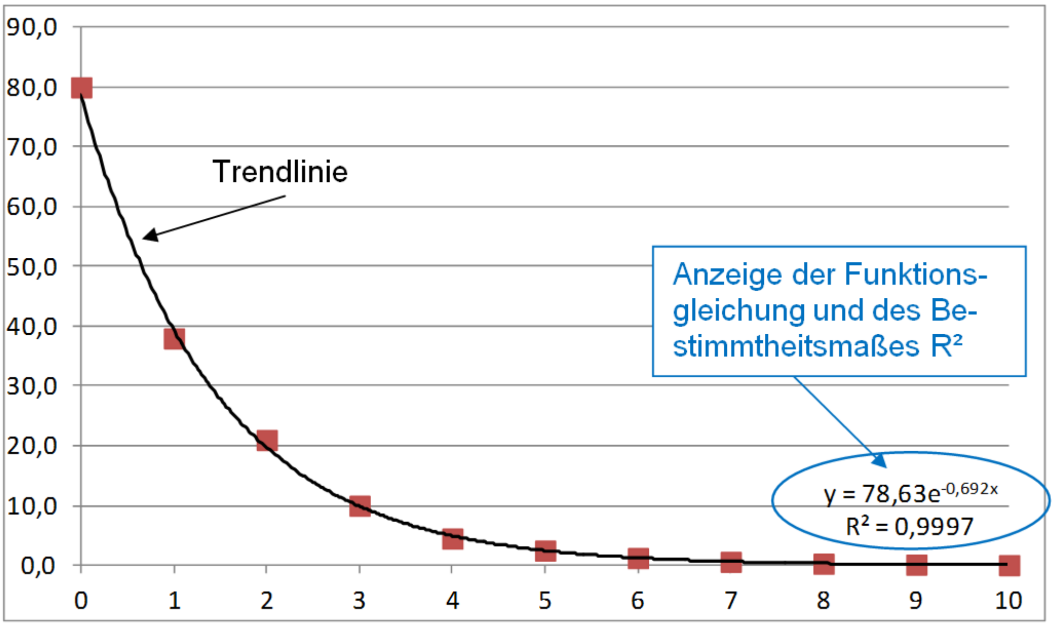
Halblogarithmisches Papier (auch einfachlogarithmisches Papier genannt) bekommst du (vielleicht) von deinem Lehrer oder deiner Lehrerin oder du kannst es dir auf folgenden Seiten herunterladen:

- https://papier.schulkreis.de/pdf/2005.pdf
- https://www.papersnake.de/logarithmenpapier/einfachlogarithmisch/

- *Digital:* Mit Programmen wie Excel lassen sich Diagramme bequem zeichnen und auswerten. Der Effekt des halblogarithmischen Papiers kann hier dadurch erzeugt werden, dass die y-Achse logarithmisch skaliert wird (meist unter den Menü-Punkt „Achsen formatieren" zu finden).



Alternativ dazu bieten diese Programme meist auch die Möglichkeit eine sogenannte „Trendlinie" zu zeichnen. Wählt man hier den Typ „Exponentiell" aus, zeichnet das Programm, die bestmögliche Exponentialfunktion durch die Messpunkte und zeigt auf Wunsch auch die Funktionsgleichung an. Wenn du die Abweichung der Messwerte von der idealen Exponentialfunktion nicht nur durch Augenmaß bewerten willst, kannst du dir auch das sogenannte Bestimmtheitsmaß (R^2) anzeigen lassen. Je näher es beim Wert 1 liegt, desto besser entsprechen die Messwerte der ermittelten Exponentialfunktion. Die folgende Abbildung zeigt die Trendlinie am Beispiel der Abkühlung einer Tasse Tee aus dem ersten Abschnitt.



c) <u>Beschränktes Wachstum</u> (bzw. beschränkte Abnahme)

- *Grafisch*: Leider gibt es keine einfache Möglichkeit für einen genauen Nachweis. Wenn die Messpunkte auf einer Kurve liegen und sich einem Maximalwert (bzw. Minimalwert) nähern, so kann das ein Anzeichen für ein beschränktes Wachstum sein.

- *Rechnerisch* (für Experten!): Bilde jeweils die Differenzen zwischen der (abgeschätzten) Grenze G und deinen Messwerten. Falls es sich um ein beschränktes Wachstum handelt, lassen sich diese Differenzen durch eine Exponentialfunktion wie beim exponentiellen Wachstum beschreiben. Wende eines der Verfahren aus dem vorherigen Abschnitt auf die Differenzen an, um diese Eigenschaft zu prüfen.

d) <u>Logistisches Wachstum</u>

- *Grafisch*: Leider gibt es keine einfache Möglichkeit für einen genauen Nachweis. Wenn die Messpunkte auf einer s-förmigen Kurve liegen und sich einem Maximalwert nähern (siehe erster Abschnitt), so kann das ein Anzeichen für ein logistisches Wachstum sein.